

Ασκήσεις στη Παράγωγο

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$. Να αποδείξετε ότι :
 $(1-x) \cdot f''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Να αποδείξετε ότι :
 $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του a ,
ώστε $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι $f(6)=3$, $f'(6)=7$,
 $g(3)=6$ και $g'(3)=4$, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό:

α) $F'(3)$, όπου $F(x) = f(g(x))$, $x \in \mathbb{R}$ β) $G'(6)$, όπου $G(x) = g(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) + f^2(x) = -1$. β) Αν $f''(x) = 0$, τότε $f(x) = 0$.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f
της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 5$, οι οποίες

α) είναι παράλληλες προς την ευθεία $\zeta: 10x + y - 6 = 0$.

β) είναι κάθετες στην ευθεία $\eta: x + 14y + 28 = 0$.

γ) σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 135^\circ$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της
συνάρτησης $f(x) = \ln x$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + a}{2x + a}$. Να βρείτε τον $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη

της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ να είναι
παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ασκήσεις στη Παράγωγο

9. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon: y=3x-1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x)=2x^2-\alpha x+\beta$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(2, 0)$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta: 4x-y-1=0$.

11. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και να εφάπτεται της ευθείας $\delta: y=x$ στην αρχή των αξόνων.

12. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2-x+1)$ και $g(x)=x^2-\alpha x+\beta$.

Να βρείτε:

α) την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

β) τις τιμές των α, β , ώστε η (ε) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο $B(2, g(2))$.

14. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $2f(x)-f(2-x)=3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=3$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1)=0$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h)-1}{h}$.

Ασκήσεις στη Παράγωγο

15. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=ax^2+\beta x-1$ και $g(x)=e^x-1$. Αν οι γραφικές παραστάσεις έχουν στο κοινό τους σημείο $A(1,\psi_0)$ κοινή εφαπτομένη, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β καθώς και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.
16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+\beta, x>0, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x)=ax^2, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
Αν $M(1,\psi_M)$ κοινό σημείο των C_f, C_g , να βρείτε:
i) τις τιμές των α, β , ώστε οι γραφικές παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M και
ii) την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-\alpha}-1, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ και $g(x)=\frac{\beta}{x+1}, x \neq -1, \beta \in \mathbb{R}$.
Αν $M(1,0)$ σημείο της C_f ,
i) να δείξετε ότι $\alpha=1$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο M .
ii) να βρείτε σημείο $N(x_0,g(x_0))$ της C_g , καθώς και το β , αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο M εφάπτεται και της C_g στο N .